УДК 556.3
Телима С.В.

ОСОБЛИВОСТІ ВОДООБМІНУ В БАГАТОШАРОВІЙ ВОДОНОСНІЙ ТОВЩІ ПРИКОЛИВАННЯХ РІВНІВ ҐРУНТОВИХ ВОД, ЩО МАЮТЬ ВИПАДКОВИЙ ХАРАКТЕР

Відомо, що більшість процесів, що відбуваються в насичено-ненасиченому середовищі, мають стохастичну природу. Для їх дослідження необхідно використовувати відповідні стохастичні моделі. За останні роки цьому питанню приділяється серйозна увага [3,7-10].

В даній роботі розглянуто класичну схему одновимірної фільтрації в трьохшаровій товщі з перетіканням, яка досить часто використовується для розв"язків прикладних задач водо – і масообміну і складається з нижнього напірного горизонту, верхнього безнапірного горизонту, які взаємодіють між собою через слабопроникний розділький шар [6]. Коливання рівнів ґрунтових вод (РГВ), які мають випадковий характер, обумовлюють зміни у величині перетікання до нижнього горизонту, а також впливають на перерозподіл напорів у ньому. Взагалі, коливання рівнів ґрунтових вод у часі можуть бути досить складними за походженням і не піддаватись точній оцінці. В практичних дослідженнях такі коливання часто не враховуються, а задають їх середні значення для спрощення складних математичних обчислень реальних гідрогеодинамічних систем. Проте, в деяких випадках такий підхід приводить до серйозних помилок при розв"язках задач водо-і масообміну у насичено-ненасиченому середовищі. Наприклад, важливим є врахування флуктуацій РГВ в задачах прогнозу забруднення підземних вод, коли має місце забруднення ґрунтового потоку, що залягає вище. Коли така система знаходиться спочатку у стані гідравлічної рівноваги, то у цьому випадку міграція забруднень із горизонту ґрунтових вод до напірного горизонту через слабопроникний розділький шар представляє собою слабкий дифузійний процес. Якщо ж поверхня ґрунтових вод має постійні коливання, то при великих числах Пекле ($V\,l\,/\,D^*$, де V – швидкість потоку , l – довжина горизонту , D^* – коефіцієнт молекулярної дифузії) існуючий дифузійний процес стає змінним з домінуючою адвекцією і відбувається активізація забруднення напірного горизонту протягом значного часу його протікання..

Вплив змінного перетікання на гідравлічну реакцію нижнього горизонту можна оцінити з стохастичної точки зору. Будемо вважати, що змінна величина перетікання через розділький шар обумовлюється в основному випадковими коливаннями РГВ у суміжному горизонті. При цьому ми приймаємо наступні припущення для даної схеми : фільтрація в напірному горизонті одновимірна та неусталена; РГВ в суміжному горизонті на початок постійні у просторі і їх зміни обумовлені випадковими коливаннями у часі; система спочатку знаходиться у гідравлічній рівновазі, тобто, нові коливання ґрунтових вод стохастично незалежні від початкового напору.

Математична модель одновимірної неусталеної фільтрації в обмеженому однорідному водоносному горизонті з перетіканням має наступний вигляд :

$$T\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]+\frac{K'}{b'}\left[u^*(t)-u(x,t)\right]=S\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \tag{1a}$$

де
$$u(x,0)=u_0+h_0(w),\quad E\left\lfloor h_0(w)\right\rfloor=0 \tag{1b}$$

$$u(0,t)=u_0 \tag{1c}$$

$$\partial u/\partial x(l,t)=0 \tag{1d}$$

де E [...] – математичне очікування аргументу в дужках, T, K', b' – відповідно коефіцієнт водопровідності напірного горизонту, коефіцієнт фільтрації роздільного шару та його потужність, $\mathbf{u}$ – напір підземних вод , S – водовіддача, $\mathbf{u}^*(t)$ – середня по простору поверхня рівнів ґрунтових вод і $\mathbf{u}_0$ – початкове середнє значення гідравлічного напору. Ми приймаємо жорсткий режим фільтрації у роздільному шарі і вважаємо, що перетікання відбувається лише у вертикальному напрямку. В принципі, $\mathbf{u}^*(t)$ може бути п′єзометричним напором напірного горизонту, що залягає нижче.

Згідно прийнятої постановки задачі, п′єзометричний напір в горизонті підземних вод і поверхня ґрунтових вод коливаються з деякою середньою величиною і при цьому стохастичні складові цього процесу можна записати наступним чином :

$$u(x,t)=H(x,t)+h(x,t;w)\quad E\left[h(x,t;w)\right]=0 \tag{2a}$$

$$u^*(t)=H^*(t)+\xi(t;w)\quad E\left[\xi(t;w)\right]=0 \tag{2b}$$

де $H(x, t)$ – сукупність середніх значень гідравлічного напору, $h(x, t; w)$ – нульове середнє змін напору, $H^*(t)$ – постійне середнє значення рівнів ґрунтових вод, $\xi(t, w)$ – нульове середнє постійної величини коливань РГВ, де w вказує на випадкову природу цієї функції. Для фіксованих w (тобто, для заданої вибірки $w \in \Omega$, де Ω – простір ймовірності або сукупність реалізацій), $h(x, t; w)$ є функцією, що залежить від x і t [1,4].

З формул (2а) – (2b) видно, що зміни напору у просторі та часі $h(x, t; w)$ обумовлені стохастичною складовою коливань рівнів ґрунтових вод $\xi(t, w)$. Підставляючи (2а) і (2b) в (1), і зробивши відповідні перетворення, отримуємо наступну систему рівнянь, що складають детерміністичну та стохастичну крайові задачі фільтрації :

Система рівнянь крайової задачі фільтрації:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t)+\frac{\left\lfloor H^*(t)-H(x,t)\right\rfloor}{\lambda^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) \tag{3a}$$

$$H(x,0)=u_0 \tag{3b}$$

$$H(0,t)=u_0 \tag{3c}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x(l,t)}=0 \quad \{3d)$$

Стохастична крайова задача:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t;w)+\frac{[\xi(t;w)-h(x,t;w)]}{\lambda^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial h}{\partial t}(x,t;w) \tag{4a}$$

$$h(x,0;w)=h_0(w), \quad \mathrm{E}\left\lfloor h_0^2(w)\right\rfloor=\sigma_{u_0}^2 \tag{4b}$$

$$h(0,t;w)=0 \tag{4c}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x(l,t;w)}=0 \tag{4d}$$

де $\sigma_{u_0}^2$ – відхилення від постійного початкового напору, $D = T/S$ – коефіцієнт п′єзопровідності,

λ = (Tb ‘/ K’) - коефіцієнт перетікання через роздільний шар.

Необхідно відмітити, що припущення однорідного горизонту дозволяє безпосередньо використати стохастичний підхід до проблеми, так як стохастична крайова задача (4) є незалежною від чисто фільтраційної задачі (3) і навпаки, тобто, стохастичні коливання гідравлічного напору не залежать від напору в задачі (3). Вони залежать лише від інтенсивності (змін) коливань рівнів ґрунтових вод і від невизначеності в початкових значеннях напорів при умові, що граничні умови є детермінованими. В даній роботі буде розглядатися лише стохастична крайова задача, що дозволяє оцінити величину коливань напорів підземних вод в залежності від змін інтенсивності перетікання через роздільний шар, а також випадкової складової коливань рівнів ґрунтових вод ξ (t;w).

Використовуючи перетворення Лапласа до (4), маємо наступний розв”язок [5] :

$$h(x,t;w)=\frac{4D}{\pi\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left[\frac{2n+1}{2}\pi\,\frac{x-l}{l}\right]}{2n+1}\times$$
$$\left(\frac{\lambda^2}{D}\exp\left(-\beta_n\left(D/\lambda^2\right)t\right)h\,(0;w)+\int_0^t\exp\left(-\beta_n\left(D/\lambda^2\right)(t-\eta)\right)\xi\,(\eta;w)d\eta\right) \tag{5a}$$

де
$$\beta_n=\left(1+\frac{(2n+1)^2}{4}\lambda^2\frac{\pi^2}{l^2}\right) \tag{5b}$$

Стохастичний розв”язок (5) показує, що для однорідного водоносного горизонту з заданими (детермінованими) граничними умовами зміни гідравлічного напору в часі та просторі обумовлені випадковими коливаннями РГВ і випадковим розподілом початкового поля напорів. Крім того, величина напору лінійно залежить від стохастичних процесів $\xi\,(t,;w)$ і $h_0(w)$, значень геофільтраційних параметрів системи, коефіцієнтів перетікання і п”єзопровідності, а також розмірів області фільтрації, що виражається через довжину водоносного горизонту, l.

Розглянемо автокореляційні функції відносно гідравлічного напору при коливаннях РГВ, $\xi\,(t;w)$, які є дельта-корельовані (білий шум) і повністю корельовані (випадкові, але постійні у часі). При цьому проаналізуємо асимптотичні властивості коливань напору на границі ($x=l$) для малих і великих значень часу **t** і для великих значень безрозмірного коефіцієнта перетікання, λ/l. Як буде показано нижче, максимальні коливання в значеннях напорів мають місце при $x=l$, тоді як величина коливань в довільній точці $0\le x\le 1$ має верхню межу, яка задається величиною відхилення при $x=l$.

На основі рівняння (5) автокореляційну функцію можна записати як [5,9]:

$$R_{uu}(x_1,t_1,x_2,t_2)=E\,[h(x_1,t_1;w)h(x_2,t_2;w)]=$$
$$\frac{16D^2}{\pi^2\lambda^4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+m}cos\left[\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x_1-l}{l}\right]\cdot cos\left[\frac{2m+1}{2}\pi\frac{x_2-l}{l}\right]\cdot[(2n+1)(2m+1)]^{-1}\right]\bullet \tag{6}$$
$$\left(\frac{\lambda^4}{D^2}exp\left(-(\beta_n t_1+\beta_m t_2)D/\lambda^2\right)\sigma_{u_0}^2+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}exp\left(-(\beta_n(t_1-u)+\beta_m(t_2-\nu))D/\lambda^2\right)R_{\xi\xi}(u,\nu)dud\nu\right)$$

де $R_{\xi\xi}(u,\nu) = E\left[\xi(u;w)\xi(u;w)\right].$

У даному випадку початковий напір $h_0(w)$ приймається статистично незалежним від коливань РГВ ξ $(t; w)$, бо ми вважаємо, що система знаходиться спочатку в гідравлічній рівновазі.. Далі ми розглядатимемо цю систему , де коливання початкового напору $\sigma^2_{u_0}$ характеризують невизначеність, пов′язану з початковим положенням гідравлічного напору.

Слід відмітити, що постійний стохастичний процес ξ $(t; w)$ можна ідеалізувати з математичної точки зору через білий шум, який дельта-корелюється у часі [4]. Так

$E\left[\xi(u,w)\xi(\nu,w) = \sigma^2_w\,\delta(u-\nu)\right]$, де δ – дельта-функція Дірака, а σ^2_w – величина густини спектральної функції білого шуму розмірністю L^2T. Підставляючи вказану кореляційну структуру в (6) та враховуючи властивості дельта-функції , отримуємо [1,2]:

$$R_{uu}(x_1,t_1;x_2,t_2) = \frac{16}{\pi^2}\times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}\cos(\alpha_n)\cos(\alpha_m)\cdot\left(\exp\left(-\left(\beta_n t_1+\beta_m t_2\right)D/\lambda^2\right)\sigma^2_{\varphi_0}+\frac{D}{\lambda^2}C_{mn}(t_1,t_2)\,\sigma^2_{\varpi}\right)}{(2n+1)(2m+1)},$$

де $\alpha_n = \frac{2n+1}{2}\pi\frac{x_1-l}{l},\quad \alpha_m = \frac{2m+1}{2}\pi\frac{x_2-l}{l},$ (7a)

(7a)

$$C_{mn}(t_1,t_2) = \frac{\exp\left[-\left[\beta_n(t_1-\min(t_1,t_2))+\beta_m(t_2-\min(t_1,t_2))\right]\frac{D}{\lambda^2}\right]-\exp\left[-\left[\beta_n t_1+\beta_m t_2\right]\frac{D}{\lambda^2}\right]}{\beta_n+\beta_m} \qquad (7b)$$

Відхилення в значеннях $\sigma^2_{u_0}$ гідравлічного напору $\sigma^2_{uu}(x,t)$ можна отримати з $R_{uu}(x_1,t_1;x_2,t_2)$ при $x_1 = x_2 = x$ і $t_1 = t_2 = t$. Рівняння (7a) і (7b) показують, що автокореляція гідравлічного напору залежить від величини спектральної функції ξ $(t; w)$, відхилення постійного початкового напору, відношення (D/λ^2) та відношення (λ/l).

Якщо припустити, що $t_2 = t_1 + \tau$, де $\tau \geq 0$ і обмежене, то при $t_1 \to \infty$ функція кореляції залежить лише від часу τ і C_{mn} буде

$$\lim_{t_1\to\infty} C_{mn}(t_1,t_2) = \frac{e^{-\left(D/\lambda^2\right)\beta_m\tau}}{\beta_n+\beta_m} \qquad (8)$$

Тепер проаналізуємо зміни напору при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}$, де задано відсутність потоку і ми припускаємо максимальне значення змін, а також для випадків великих значень часу і великих та малих значень безрозмірного параметру $\lambda/\boldsymbol{l}$.

Нехай $\sigma_u^2(l)$ визначає граничне значення відхилення напору при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}$, як тільки $t_1 = t_2 = \mathbf{t} \to \infty$. Тоді використовуючи (7) і (8) маємо

$$\sigma_u^2(l) = \frac{4D\sigma_w^2}{\pi\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(1+\beta_n)}\left(1 - Sech\left(\frac{l}{\lambda}\right)(1+\beta_n)^{1/2}\right) \tag{9}$$

і $\sigma_u^2(l)$ залежить від $\boldsymbol{D}$ і тривалості неусталеного режиму фільтрації, а стаціонарний режим не може бути досягнутий до тих пір, доки мають місце коливання РГВ. Для малих і великих значень коефіцієнту перетікання $\lambda/\boldsymbol{l}$ асимптота $\sigma_u^2(l)$ наближається гранично до (9) :

$$\begin{aligned} &\sigma_u^2(l) = 0, \quad \lambda/l \to \infty \\ &\sigma_u^2(l) = \frac{1}{2}\frac{D}{\lambda^2}\sigma_w^2, \quad \lambda/l \to 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Якщо $\lambda/\boldsymbol{l} \to \infty$, то для заданої величини λ коефіцієнт перетікання прямує до 0, а $\boldsymbol{K'}/\boldsymbol{b'} \to 0$. Це еквівалентно випадку ізольованого пласта, коли коливання РГВ не впливають на нього. Крім того, при постійному напорі на границі моделі маємо випадок відсутності потоку в ізольованому горизонті. Постійний гідравлічний напір має нульове відхилення. Якщо $\lambda/\boldsymbol{l} \to 0$, то $\boldsymbol{K'}/\boldsymbol{b'} \to \infty$, що означає практично прямий гідравлічний зв′язок з водоносним горизонтом ґрунтових вод. У зв′язку з тим, що припускається, що коливання РГВ мають дельта-кореляцію, відхилення в значеннях гідравлічного напору в межах напірного горизонту стають теоретично нескінченними і з (10) видно, що $\sigma_u^2(l) = \infty$, якщо $\lambda \to 0$ при заданій довжині водоносної системи, $\boldsymbol{l}$.

Раптовий підйом РГВ на випадкову величину, яка вибирається постійною у часі, можна розглядати як стохастичний процес, який повністю корелюється у часі. У даному випадку ми маємо, що $R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \sigma_\xi^2$. Підставляючи цей вираз у (6), отримуємо наступну кореляційну функцію відносно напору:

$$R_{uu}(x_1,t_1;x_2,t_2)=\frac{16}{\pi^2}$$

$$\bullet\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}\cos(\alpha_n)\cos(\alpha_m)\cdot\left(\exp\left(-\left(\beta_n t_1+\beta_m t_2\right)\frac{D}{\lambda^2}\right)\sigma_{u_0}^2+C_{mn}(t_1,t_2)\,\sigma_\xi^2\right)}{(2n+1)(2m+1)},$$

де $\alpha_n=\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x_1-l}{l},\quad \alpha_m=\frac{2m+1}{2}\pi\frac{x_2-l}{l},$ (11a)

$$C_{mn}(t_1,t_2)=\frac{\left(1-\exp\left(\left(-\frac{D}{\lambda^2}\right)\beta_n t_1\right)\right)\cdot\left(1-\exp\left(\left(-\frac{D}{\lambda^2}\right)\beta_m t_2\right)\right)}{\beta_n\beta_m} \tag{11b}$$

Як видно з виразу, автокореляційна функція напору залежить від відхилень у РГВ, σ_ξ^2, невизначеності в початкових значеннях напору $\sigma_{\xi_0}^2$ і гідрогеологічних умов системи з перетіканням, що виражається через безрозмірні змінні D/λ^2 і λ/l. При досягненні великих значень часу, покладаючи $t_2=t_1=t\to\infty$, відхилення в значеннях напору при $x=l$ буде:

$$\sigma_u^2(l)=\lim_{t\to\infty}\sigma_u(l,t)=\sigma_\xi^2\left(1-Sech\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{12}$$

З рівняння (12) видно, що повністю зкорельовані коливання РГВ обумовлюють граничні максимальні (постійні) відхилення у напорах, що залежать від відхилень у коливаннях σ_ξ^2 і відношення коефіцієнту перетікання до довжини потоку λ/l. Припускаючи білий шум у коливаннях РГВ, повністю зкорельовані відхилення зумовлюють максимум відхилень у напорах, які не залежать від коефіцієнту D водоносного горизонту. Це свідчить про те, що усталений рух в системі досягається лише тоді, коли весь потік стає стаціонарним. У цьому випадку для великих і малих значень λ/l відхилення у напорах при $x=l$ досягають наступних асимптотичних значень:

$$\begin{aligned}\sigma_u^2(l)&=\sigma_\xi^2,\quad \lambda/l\to 0\\ \sigma_u^2(l)&=0,\quad \lambda/l\to\infty\end{aligned} \tag{13}$$

Розглянемо далі вплив перетікання на режим напірного горизонту, обумовлений коливаннями РГВ у даній водоносній системі.

Загальний об'єм води, що перетікає у водоносний горизонт на одиницю ширини за час t буде:

$$\boldsymbol{Q(t,w)=\frac{K'}{b'}\int_0^t\int_0^l\left[u^*(x,\tau;w)-u(x,\tau;w)\right]d\,x\,d\,\tau} \tag{14}$$

Якщо взяти очікування для $\boldsymbol{Q}$ ($\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{w}$), а потім вилучити з (14), то отримаємо стохастичний кумулятивний процес з нульовим середнім q ($\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{w}$):

$$\begin{aligned} q(t,w)&=\frac{K'}{b'}\int_0^t\int_0^l\left[\xi(\tau;w)-h(x,\tau;w)\right]d\,x\,d\,\tau \\ &=\frac{K'}{b'}\left(l\int_0^t\xi(\tau;w)d\,\tau-\int_0^t\int_0^l h(x,\tau;w)\,d\,x\,d\,\tau\right) \end{aligned} \tag{15}$$

При цьому автокореляційна функція записується як:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{R_{QQ}(t,t+s)=E\left[q(t,w)q(t+s;w)\right]=} \\ &\boldsymbol{\left(\frac{K'}{b'}\right)^2 l^2\int_0^t\int_0^{t+s}R_{\xi\xi}(\tau;\eta)d\,\tau\,d\,\eta-l\int_0^l\int_0^t\int_0^{t+s}R_{\xi h}(\tau;x,\eta)d\,\tau\,d\,\eta\,d\,x} \\ &\boldsymbol{+l\int_0^l\int_0^l\int_0^t\int_0^{t+s}R_{hh}(x_1,\tau;x_2,\eta)d\,\tau\,d\,\eta\,d\,x_1\,d\,x_2-} \\ &\boldsymbol{-l\int_0^l\int_0^t\int_0^{t+s}R_{h\xi}(x,\eta;\tau)d\,\tau\,d\,\eta\,d\,x} \end{aligned} \tag{16}$$

де $\boldsymbol{R_{ab}=E[a,b]}$, а $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ відносяться до $\xi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w})\ \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{w})$

Слід відмітити, що вплив випадкового початкового напору зникає при великих значеннях **t**. Використовуючи (5) і (7) в (16), можна отримати дельта-корельований вираз відносно коливань РГВ:

$$\boldsymbol{R_{QQ}(t,t+s)\approx\left[\frac{K'}{b'}l\,\sigma_w\left(1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n(2n+1)^2}\right)\right]^2 t\approx\left[\frac{K'}{b'}l\,\sigma_w\left(\frac{tanh(l/\lambda)}{l/\lambda}\right)\right]^2 t} \tag{17}$$

Аналіз (17) дозволяє зробити наступні висновки впливу коливань РГВ для великих значень часу:

1. $\boldsymbol{R_{QQ}(t,t+s)}$ не залежить від кінцевого часу, означаючи, що процес повністю корельований.

2. $R_{QQ}(t,t+s)$ збільшується лінійно у часі зі швидкістю, яка є функцією інтенсивності коливань РГВ, що вимірюється через σ_w^2, перетікання K'/b', довжини l і коефіцієнту перетікання λ.

3. Збільшення стандартного відхилення $\sigma_Q(t)$ для великих значень коефіцієнту перетікання λ/l обумовлене у більшій мірі коефіцієнтом водопровідності **T**, ніж низькою проникністю K'/b'. Очевидно, що перетікання через роздільний шар зменшується із збільшенням опору ($K'/b' \to 0$), що веде до зменшення стандартного відхилення $\sigma_Q(t)$.

4. Для фіксованого λ і для напівобмеженої області фільтрації ($l \to \infty$) для (17) отримуємо, що

$$R_{QQ}(t,t+s) \approx \left[\frac{K'}{b'}\lambda\,\sigma_w\right]^2 t \qquad (18)$$

Можна показати, що для великих значень t

$$\lim_{\lambda/l \to 0} \frac{\sigma_Q\, b'}{\sigma_w K'\, l\sqrt{t}} = 0 \qquad (19)$$

$$\lim_{\lambda/l \to \infty} \frac{\sigma_Q b'}{\sigma_w K'\, l\sqrt{t}} = 1 \qquad (20)$$

У випадку повністю корельованих коливань маємо, що $R_{\xi\xi}(t_1,t_2) = \sigma_\xi^2$. Оцінка (16) із використанням (5) і (11), показує, що має місце наступна асимптотична апроксимація:

$$R_{QQ}(t,t+s) \approx \left[\frac{K'}{b'}\, l\,\sigma_\xi \frac{\tanh l/\lambda}{l/\lambda}\right]^2 t^2\left(1+\frac{s}{t}\right) \quad t \to \infty \qquad (21)$$

яка росте квадратично у часі для великих часів , тобто, $s << t$. Крайні відхилення для великих значень **t** задаються як :

$$\lim_{\lambda/l \to 0} \frac{\sigma_Q\, b'}{\sigma_\xi K'\, l\, t} = 0 \qquad (22)$$

$$\lim_{\lambda/l \to \infty} \frac{\sigma_Q\, b'}{\sigma_\xi K'\, l\, t} = 1 \qquad (23)$$

При цьому у виразах витримується нерівність $(\lambda/l) \tanh(l/\lambda) \le \sigma_Q b'/\sigma_\xi K' l\, t) \le 1$. Для великих значень **t** відхилення зростає лінійно і процес Q (t; w) стає повністю корельованим у часі, тобто, $\rho\,(t, t+s) \sim 1, t \to \infty$.

Розглянемо наступний процес:

$$\overline{Q}(t,w) = \frac{1}{t} Q(t,w)\ ; \quad \sigma^2_{\overline{Q}(t)} = \frac{1}{t^2}\sigma^2_{Q(t)} \qquad (24)$$

що характеризує середнє у часі перетікання в напірний горизонт, або швидкість, з якою воно відбувається через роздільний шар одиничної потужності по всій його довжині , або навпаки. При $t \to \infty$ середній потік $Q\,(t;\,w)$ буде мати наступну асимптотичну автокореляцію:

$$R_{\bar{Q}\bar{Q}}(t, t+s) \approx \left[\frac{K'}{b'} l \sigma_{\xi} \left(\frac{tanh(l/\lambda)}{l/\lambda}\right)\right]^2, \quad t \to \infty, \quad s << t \tag{25}$$

Цей вираз означає, що $\bar{Q}(t;\varpi)$ стає повністю корельованою з постійною кореляцією, що залежить тільки від коливань РГВ, гідравлічних властивостей напірного пласта і роздільного шару. Із виразу відносно швидкості сумарного перетікання, яка є похідною у часі від $Q\,(t;\,w)$ і $Q_t\,(t;\,w)$, отримуємо, що :

$$Q_t\,(t;w) = \frac{K'}{b'}\int_0^l \left[u^*(t;w) - u(x,t;w)\right] d\,x \tag{26}$$

В цілому, результати досліджень дозволяють зробити наступні висновки : реакція горизонту на вказані випадкові зміни гідравлічного режиму в системі обумовлена в основному впливом гідрогеологічних умов, геометрії горизонту, яка виражена через через довжину потоку, гідравлічними властивостями системи, вираженими через коефіцієнти дифузії, перетікання та проникності роздільного шару. Із збільшенням коефіцієнту перетікання λ збільшується вплив випадкового положення початкового напору на його коливання.

Асимптотичні автокореляції, в свою чергу, свідчать про наступне:

1. При коливаннях РГВ з білим шумом коливання величини сумарного перетікання зростає лінійно при великих значеннях часу зі швидкістю, яка є функцією статистик коливань, довжини потоку , коефіцієнту перетікання і проникності через роздільний шар.
2. Коливання РГВ, які є повністю зкорельовані, обумовлюють сумарне перетікання, коливання якого асимптотично квадратичні у часі.
3. Перетікання при великих значеннях часу можна розглядати як випадкову функцію у часі, а не стохастичний процес.
4. Мінливість величини перетікання є нескінченною, якщо припустити, шо РГВ коливається з білим шумом, тоді як мінливість основного потоку є обмеженою. Тому основний потік можна розглядати як асимптотично стаціонарний стохастичний процес другого порядку.

Перелік використаної літератури

1. Боровков А.А. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1972. – 288с.
2. Гавич И.К., Семенова С.М., Швец В.М. Методы обработки гидрогеологической информации с вариантами задач. М., Высшая школа, 1981. – 160с.
3. Дэвис Дж. Статистика и анализ геологических данных. М., Мир, 1977. – 571с.
4. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. М., Наука, 1968. -312с.
5. Мартыненко В.С. Операционное исчисление.К., Вища школа, 1973. – 268с.
6. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977. – 663с.
7. Телима С.В.Прогнозування процесів підтоплення міських територій та промислово-міських агломерацій в сучасних умовах. Методи і методика досліджень. Наук.-техн.зб. „Містобудування та територіальне планування", К., КНУБА, 2005, вип..22. – с.367-378.
8. Cheng H – D, Lafe O. Boundary element solution for stochastic groundwater flow : Random boundary condition and recharge. Water Resources Research, vol.27, no.2, 1991. – p. 231-242.
9. Hantush M.M., Marino M.A. One-dimensional stochastic analysis in leaky aquifers subject to random leakage. Water Resources Research, vol.30, no.2, 1994. – p.549-558.
10. Unny T.E. Stochastic partial differential equation in groundwater hydrology. Stoch.Hydrol. Hydraulics, no.3, 1989. – p. 135-153.

АНОТАЦІЯ

Розглянуто процес водообміну в багатошаровій водоносній системі із стохастичної точки зору. Приведено систему рівнянь, що описує одновимірну неусталену фільтрацію з перетіканням в стохастичній постановці. Показано вплив основних характеристик системи на формування перетікання в основний водоносний горизонт на його гідравлічний режим при випадкових змінах цих характеристик.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрен процесс водообмена в многослойной водоносной системе из стохастической точки зрения. Приведена система уравнений, описывающая одномерную неустановившуюся фильтрацию с перетеканием в стохастической постановке. Показано влияние основных характеристик системы на формирование перетекания в основной водоносный горизонт и на его гидравлический режим при случайных изменениях этих характеристик